LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 6

Neke primjene određenog integrala u inženjerstvu

Lekcije iz Matematike 2.

6. Neke primjene odredjenog integrala u inženjerstvu.

I. Naslov i objašnjenje naslova
U lekciji se ilustriraju tri primjene odredjenog integrala u inženjerstvu. Prva je u rješavanju problema težišta ravne nehomogene žice (to je ujedno i primjena u vjerojatnosti i statistici, što će se razjasniti sljedeće godine). Druga je u rješenju problema momenta inercije, a treća u problemu odredjivanja rada što ga izvrši (promjenjiva) sila koja djeluje uzduž nekog pravca.

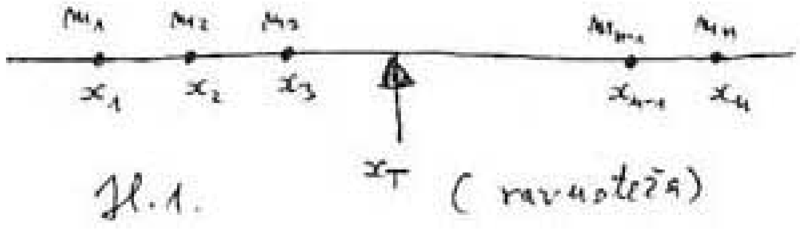
II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem
Težište ravne homogene tanke žice je središte žice. Postavlja se pitanje težista ako žica nije homogena (matematički, to je problem težišta nehomogenog segmenta). Taj se problem može riješiti pomoćcu odredjenog integrala, pod uvjetom da poznajemo gustoću žice (gustoću segmenta).
Slično je za moment inercije.
Rad što ga stalna sila koja djeluje uzduž nekog pravca na putu konačne duljine jednaka je, prema definiciji rada, umnošku iznosa sile i duljine puta (uz uskladjene jedinice). Postavlja se pitanje rada ako sila nije stalna, već promjenjiva. I taj se problem rješava pomoću odredjenog integrala.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam neodredjenog i odredjenog integrala, metoda njihova računanja (naročito metode parcijalne integracije). Takodjer je potrebno poznavati sljedeće fizikalne pojmove:
1. pojam težišta sustava masa na pravcu i razumjevanje formule

$$x_T = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

gdje su mase $m_1, ..., m_n$ smještene na koordinatnom pravcu u točke s koordinatama $x_1, ..., x_n$ (sl.1.).

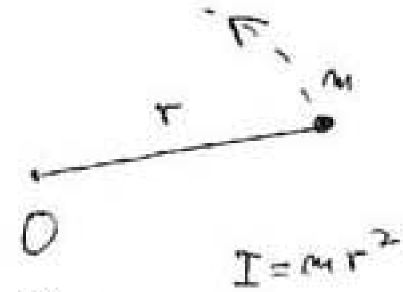


2. pojam momenta inercije I mase m oko točke udaljene r od mase (sl.2.) i formule

$$I = mr^2$$

te formule za moment inercije oko težista I_T sustava masa na pravcu (koja odavde izravno slijedi jer se momenti inercije zbrajaju):

$$I_T = \sum (x_i - x_T)^2 m_i$$

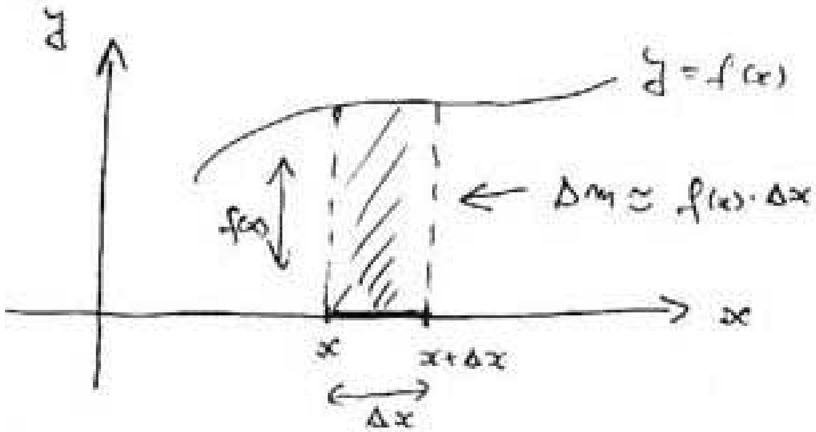


sl.2.

3. pojam funkcije gustoće $f(x)$ mase razmještene na koordinatnom pravcu koja se definira kao limes srednjih gustoća:

$$f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

dakle, $\Delta m \approx f(x)\Delta x$ (sl.3.), gdje je Δm masa smještena izmedju x i $x + \Delta x$ (na segmentu duljine Δx).

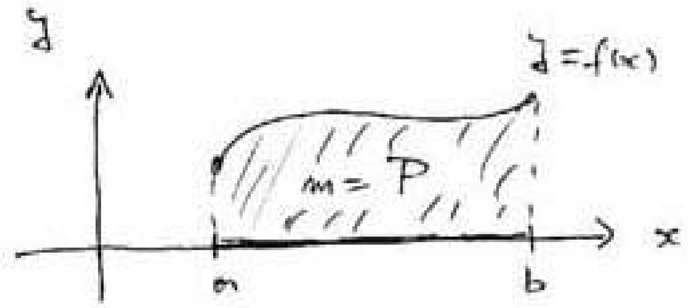


sl.3.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

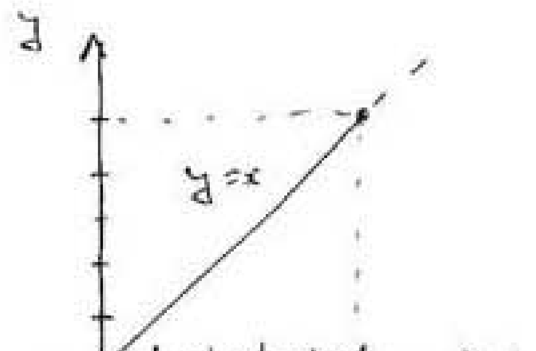
Masa nehomogenog segmenta $[a, b]$ **u ovisnosti o gustoći** (sl.4.).
Iz diferencijalne relacije $\Delta m \approx f(x)\Delta x$, dobijemo $dm = f(x)dx$ (to slijedi i izravno iz definicije gustoće u točki), dobijemo:

$$m = \int_a^b f(x)dx$$



sl. 4.

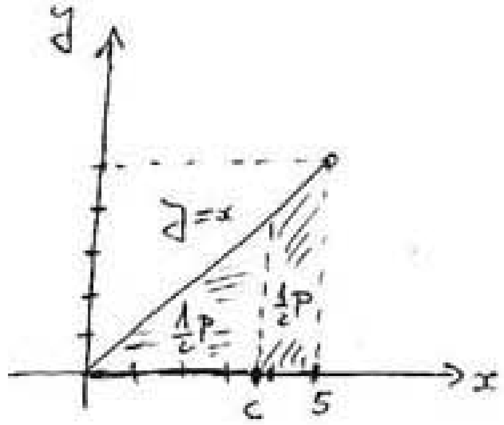
Primjer 1. - primjena formule za masu.
Neka je funkcija gustoće mase $f(x) := x$ za $0 \leq x \leq 5$.
(i) Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo.
Graf je pravac s jednadžbom $y = x$ za $0 \leq x \leq 5$ (sl.5.). Možemo zamisliti da je masa razmazana po segmentu $[0, 5]$ tako da se namaz jednoliko (jediničnom brzinom) pojačava.



sl. 5.

(ii) Odredimo ukupnu masu m.
$m = \int_0^5 x dx = \frac{x^2}{2}|_0^5 = 12.5$ (jedinica mase).

(iii) Odredimo točku c do koje je razmazano polovica mase (sl.6.).
Treba biti: $\int_0^c x dx = \frac{12.5}{2}$, tj. $\frac{c^2}{2} = \frac{12.5}{2}$, dakle $c = \sqrt{12.5}$.

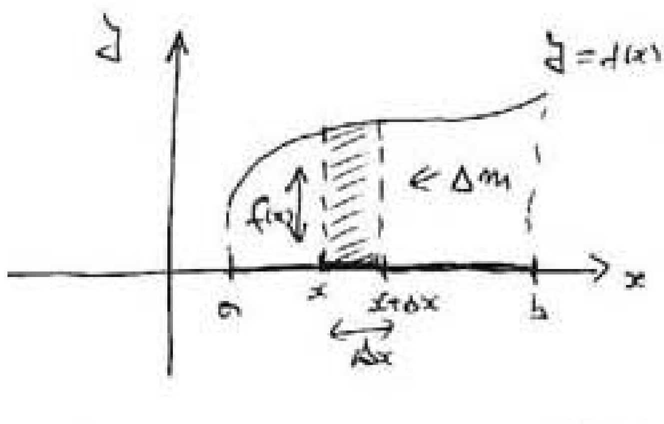


Sl. 6.

(iv) Procijenimo je li težište segmenta u c, lijevo od c ili desno od c.
Težište je lijevo od c (jer se gustoća mase povećava).

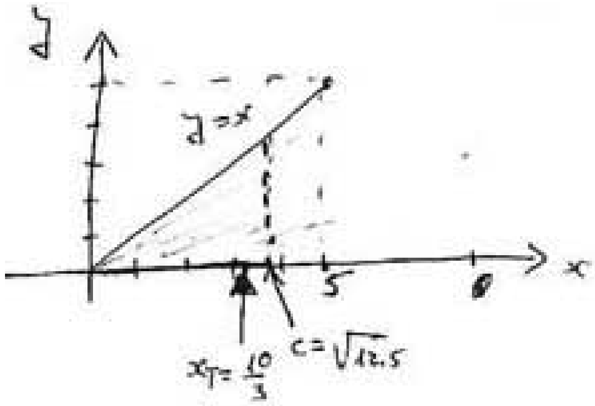
Težište nehomogenog segmenta $[a, b]$ (sl.7.).
Doprinos *krak sile puta sila* djelića mase Δm približno je jednaka $x\Delta m \approx xf(x)\Delta x$. "Zbrajanjem" svih doprinosa i dijeljenjem s ukupnom masom dobijemo:

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$



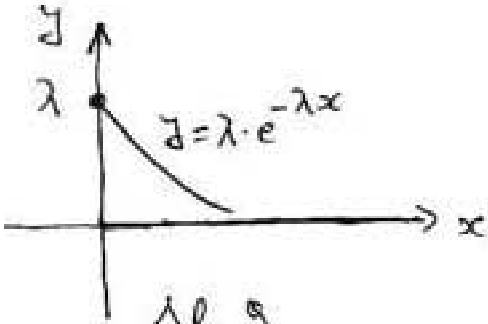
Sl. 7. $x \cdot \Delta m \approx x f(x) \Delta x$

Primjer 2. - primjena formule za x_T.
Odredimo težište segmenta iz Primjera 1.
$x_T = \frac{\int_0^5 x \cdot x dx}{\int_0^5 x dx} = \frac{\frac{x^3}{3}|_0^5}{12.5} = \frac{125}{3 \cdot 12.5} = \frac{10}{3}$ (sl.8.).



sl. 8.

Primjer 3 - formula za masu i težište vrijedi i za beskonačne intervale.
Neka je masa razmazana na $[0, +\infty >$ prema pravilu za gustoću $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x \geq 0$, gdje je $\lambda > 0$ realna konstanta (sl.9).



sl. 9

Pokažimo:
(i) $m = 1$ (jedinična masa).

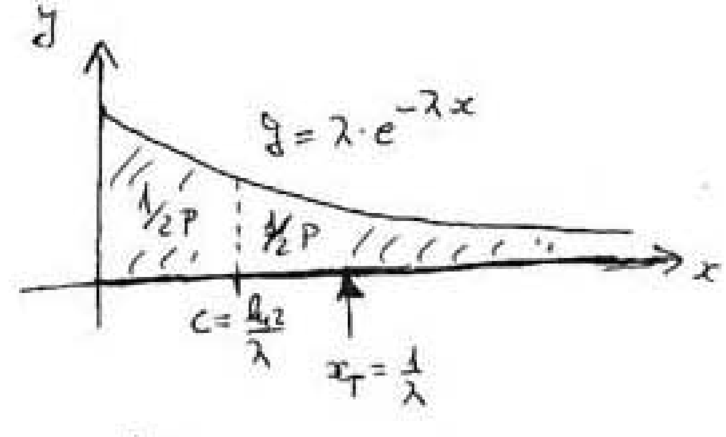
$m = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^{+\infty} = -0 - (-1) = 1$

(ii) $x_T = \frac{1}{\lambda}$.

$x_T = \frac{\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} =$
$\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = [u = x,\ du = dx;\ dv = \lambda e^{-\lambda x},\ v = -e^{-\lambda x}] = (-xe^{-\lambda x})|_0^{+\infty} +$
$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx|_0^{+\infty} = (0 - 0) - \frac{1}{\lambda}(o - 1) = \frac{1}{\lambda}$

(uočite sličnost s Primjerom 5., lekcija 4.).

(iii) polovica mase je do $\frac{\ln 2}{\lambda}$ (sl.10.).



sl. 10.

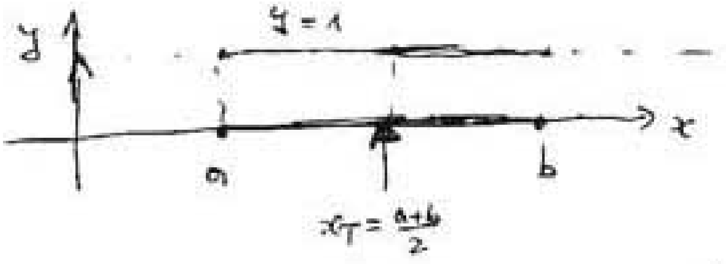
Ako je tražena koordinata z, onda treba biti $\int_0^z \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2}$, tj. $-e^{-\lambda x}|_0^z = \frac{1}{2}$, tj. $-1 + e^{-\lambda z} = \frac{1}{2}$, tj. $z = \frac{\ln 2}{\lambda}$ (usporedite ovaj rezultat s poluživotom kod radioaktivnosti).

Moment inercije segmenta.
Prema uzoru na moment inercije sustava masa na pravcu, dobijemo formulu za moment inercije oko težišta segmenta $[a, b]$ kojemu je f funkcija gustoće:

$$I_T = \int_a^b (x - x_T)^2 f(x) dx$$

Primjer 4. - moment inercije homogenog segmenta - i to je netrivijalno i potrebna nam je formula.
Homogenost znači: $f(x) = 1$ za svaki $x \in [a, b]$. Znamo da je za homogeni segment $x_T = \frac{a+b}{2}$ (sl.11, iduća stranica), pa je
$I_T = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \cdot 1 \cdot dx = \frac{(x-\frac{a+b}{2})^3}{3}|_a^b = \frac{1}{3}(\frac{b-a}{2})^3 - \frac{1}{3}(\frac{a-b}{2})^3 = \frac{2}{3}(\frac{b-a}{2})^3 = \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{l^3}{12}$,
gdje je l duljina segmenta. Uočimo da je tu $m = l$ (jednakost brojeva, bez jedinica), pa dobijemo: $I_T = m\frac{l^2}{12}$ što je dobro poznata formula momenta inercije homogenog štapa.

Primjer 5. Odredimo moment inercije oko težišta segmenta iz Primjera 1. Tamo je bilo: $[a, b] = [0, 5]$ i $f(x) := x$; u Primjeru 2. izračunali smo $x_T = \frac{10}{3}$. Zato je:
$I_T = \int_0^5 (x - \frac{10}{3})^2 x dx = \int_0^5 (x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{100}{9}x) dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{20}{9}x^3 + \frac{50}{9}x^2)|_0^5 = \frac{625}{36}$.



Sl. 11 (homogeni segment)

Rad sile na ravnom putu.
Neka je:
x koordinata pravca uzduž kojeg djeluje sila.
$F(x)$ vrijednost sile u točki x (sjetimo se dogovora: ako je $F(x) > 0$ sila djeluje u pozitivnom smjeru, inače djeluje suprotno).
Za djelić rada $\Delta R(x)$ što ga ta sila učini na putu od x do $x + \Delta x$, vrijedi:

$$\Delta R(x) \approx F(x)\Delta x$$

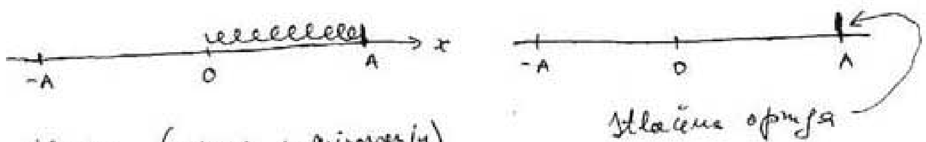
Odavde dobijemo

$$dR(x) = F(x)dx$$

a odavde za rad R što ga F učini od $x = a$ do $x = b$, dobijemo

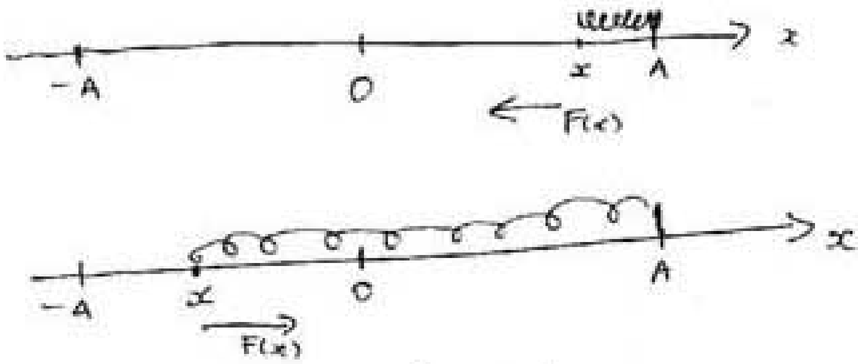
$$R = \int_a^b F(x)dx$$

Primjer 6. - primjer nekonstantne sile - elastična opruga.
Neka je:
x koordinata pravca A koordinata točke u kojoj je pričvršćena savršeno elastična tanka opruga (sl.12.a.) kojoj je u mirovanju vrh u ishodištu.



Sl.12a (opruga u mirovanju)

Oprugu stlačimo u točku A i nakon toga pustimo. Zbog savr sene elestičnosti vrh opruge titra izmedju točaka A i $-A$. Pretpostavimo da je sustav izoliran tj. da je jedina sila koja se tu javlja sila napetosti opruge. Vrijednost te sile u x označimo kao $F(x)$.
Intuitivno je jasno (i lako se možemo uvjeriri) da je sila napetosti na vrh opruge uvijek usmjerena prema ishodištu (sl.12.b.), tj. da su x i $F(x)$ suprotnih predznaka.

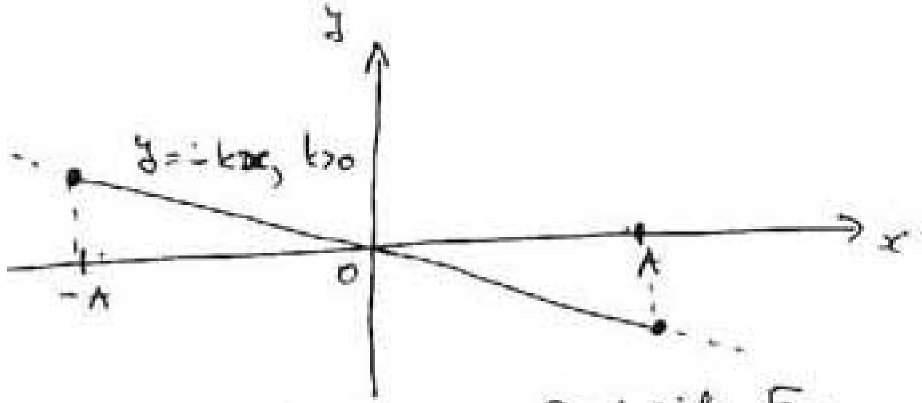


Sl. 12. b

Takodjer je intuitivno jasno, a može se potvrditi pokusom da je ta sila proporcionalna udaljenošću vrha od ishodišta (Hooke-ov zakon). Dakle:

$$F(x) = -kx$$

gdje je $k > 0$ konstanta ovisna o materijalu (sl.13.).

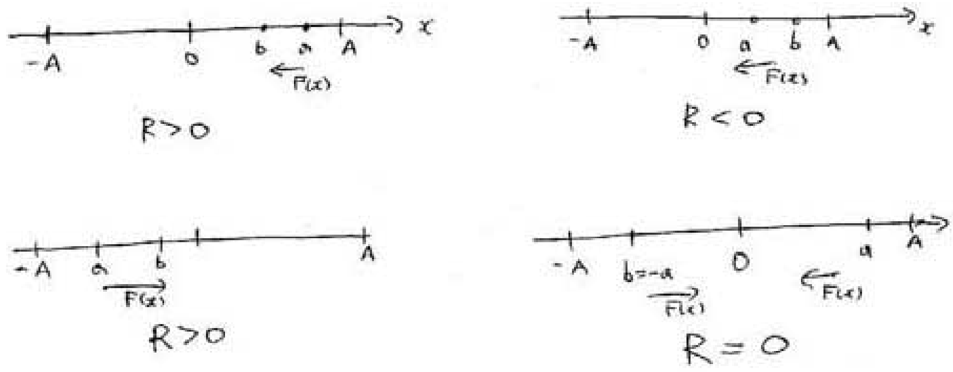


Sl. 13. Graf sile F.

Primjer 7. - rad sile napetosti elastične opruge.
Izračunajmo rad R sile F iz Primjera 6. na putu od a do b, i komentirajmo rezultat.

$R = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (-kx)dx = (-k\frac{x^2}{2})|_a^b = k\frac{a^2-b^2}{2}$.
Vidimo da je rad pozitivan ako je $|a| > |b|$, inače je negativan ili je jednak nuli (ako je $b = \pm a$). Na sl.14. predočene su i komentirane razne mogućnosti.
Posebno, iz rješenja integrala vidimo (ono što je fizikalno jasno):
(i) na putu od A do ishodišta 0 rad sile je pozitivan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju isto usmjerenje),
(ii) na putu od ishodišta 0 do $-A$ rad sile je negativan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju različita usmjerenje),

(iii) na putu od $-A$ do ishodišta 0 rad sile je pozitivan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju isto usmjerenje),
(iv) na putu od ishodišta 0 do $-A$ rad sile je negativan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju različita usmjerenja).



Sl. 14

V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte moment inercije oko težišta u Primjeru 3.
2. Neka je $[a, b] = [0, 5]$ i neka je funkcija gustoće $f(x) = 5 - x$.
(i) Procijenite grafički masu, potom je izračunajte.
(ii) Procijenite, potom izračunajte c (do kojega je polovica mase) te procijenite odnos izmedju c i x_T.
(iii) Izračunajte x_T.
(iv) Procijenite pa izračunajte moment inercije oko težista.
(v) Komentirajte vezu s Primjerima 1, 2. i 5. Jeste li iz rezultata tih primjera mogli izravno riješiti ovaj zadatak?.
Uputa. (i) U istom koordinatnom sustavu predočite funkciju gustoće homogenog segmenta.